Classification des endomorphismes du plan

par Richard Gomez

Mercredi 5 décembre 2007 (revu en octobre 2010)

Richardetdave@aol.com

Résumé

Cet article montre que tout endomorphisme du plan vectoriel réel est la composée d'une homothétie avec soit une projection, soit une symétrie, soit une rotation hyperbolique, soit une rotation elliptique, soit une transvection.

1 Introduction

Nous connaissons tous la classification des isométries du plan euclidien $\mathcal{P}$ et même de l'espace euclidien. Nous savons par exemple que toute isométrie du plan qui n'inverse pas l'orientation est soit une translation, soit une rotation. Mais que savons-nous des applications linéaires de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$? Nous savons qu'il y a les homothéties linéaires, les projections linéaires et, puisque $\mathcal{P}$ est euclidien, les isométries linéaires, mais existe-t-il d'autres types d'applications linéaires ? Comment faire pour les connaître toutes ?

Nous disons que des endomorphismes f et g du plan vectoriel réel E sont équivalents s'il existe un automorphisme ϕ de E tel que

$$f = \phi g \phi^{-1}$$

Autrement dit, modulo un changement linéaire de variable, f et g sont les mêmes applications. Ceci équivaut à dire qu'il existe des bases a et b de E telles que

$$\operatorname*{mat}_a f = \operatorname*{mat}_b g$$

ou encore que les matrices de f et g (dans n'importe quelle base) sont semblables. Nous proposons ici d'établir la classification des endomorphismes de E, c'est à dire de décrire les classes d'équivalence associées à cette relation.

Nous ferons ce travail en étudiant les matrices 2×2, puisqu'en effet notre problème est intimement lié à la question de la *réduction* des matrices. Nous utiliserons les théorèmes de diagonalisation, de trigonalisation, ainsi que les polynomes annulateurs (le polynome minimal par exemple). On peut revoir ces théorèmes dans [4].

On trouve dans [5] une méthode plus « économique » (en termes de prérecquis) qui finalement reprend implicitement les chemins de la réduction des matrices 2×2.

2 Rotations elliptiques

Définition 1. *Soient E un plan vectoriel réel et $f \in \operatorname{End}(E)$. S'il existe une base (v_1, v_2) de E pour laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\operatorname*{mat}_{(v_1,v_2)} f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$, on dit que f est la rotation elliptique d'angle θ basée sur (v_1, v_2).

Notons que par f, chaque point M tourne autour de 0 en longeant une ellipse, plus précisément :

Proposition 2. *Soient E un plan vectoriel réel, $v = (v_1, v_2)$ une base de E, $\theta \in \mathbb{R}^*$, f la rotation elliptique d'angle θ basée sur (v_1, v_2) et $a > 0$. On note (x, y) les coordonnées dans la base (v_1, v_2). Alors l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = a$ est invariante par f.*

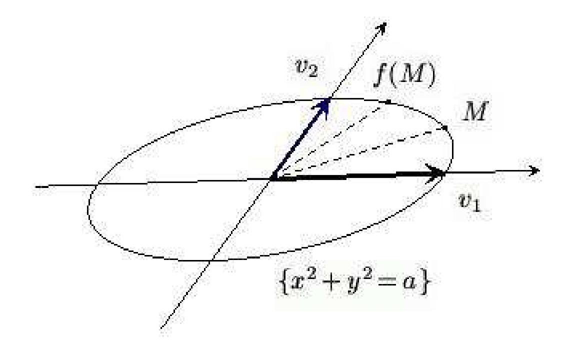


Figure 1. Illustration d'une rotation elliptique basée sur (v_1, v_2) : c'est comme si on regardait l'action d'une rotation classique sur un plan vu en perspective.

Démonstration. Fixons $a > 0$. Notons $\mathcal{E}_{v,a}$ l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = a$. Soit $M \in \mathcal{E}_{v,a}$. Notons $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ les coordonnées dans v, de M et $f(M)$, respectivement. On a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

d'où $x'^2 + y'^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = a$, ce qui montre que $f(M) \in \mathcal{E}_{v,a}$. □

3 Rotations hyperboliques

Définition 3. *Soient E un plan vectoriel réel et $f \in \mathrm{End}(E)$. S'il existe une base (v_1, v_2) de E pour laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\underset{(v_1,v_2)}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on dit que f est la rotation hyperbolique de rapport λ et d'asymptotes v_1 et v_2.

Notons (x, y) les coordonnées dans (v_1, v_2). Les hyperboles d'asymptotes $\mathbb{R}v_1$ et $\mathbb{R}v_2$ sont les courbes d'équation

$$xy = c$$

Notons $\mathcal{H}_{v,c}$ cette courbe. On a

$$f : (x, y) \longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y)$$

ainsi par f, chaque point M « tourne » si l'on peut dire, autour de 0 en longeant l'hyperbole d'asymptotes $\mathbb{R}v_1$ et $\mathbb{R}v_2$ passant par M. Le lecteur observera ce que font les points de l'hyperbole dégénérée $\mathcal{H}_{v,0}$.

Proposition 4. *Soient E un plan vectoriel réel, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et f la rotation hyperbolique de rapport λ et d'asymptotes v_1 et v_2. Alors les hyperboles d'asymptotes $\mathbb{R}v_1$ et $\mathbb{R}v_2$ sont invariantes par f.*

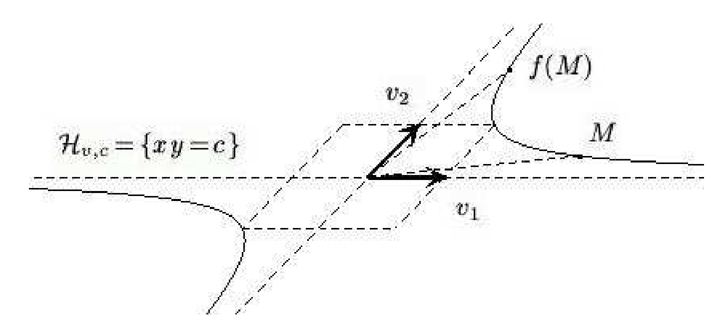


Figure 2. Illustration d'une rotation hyperbolique d'asymptotes v_1 et v_2.

Cette proposition explique la définition 3.

Démonstration. Fixons $c\in\mathbb{R}$. Soit $M\in\mathcal{H}_{v,c}$. Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans v de M et $f(M)$, respectivement. On a $x'y'=(\lambda x)(\lambda^{-1}y)=xy=c$, d'où $f(M)\in\mathcal{H}_{v,c}$. □

Remarque 5. Il existe pour la rotation hyperbolique f une base dans laquelle la matrice de f ressemble à la matrice d'une rotation elliptique sauf qu'au lieu de s'écrire avec les fonctions trigonométriques cos et sin, elle s'écrit avec les fonctions hyperboliques ch et sh. Dans la théorie de la relativité restreinte on les appelles transformations de Lorentz, voir [3].

4 Transvections

Définition 6. *Soient E un plan vectoriel réel et $f\in\mathrm{End}(E)$. S'il existe une base (v_1, v_2) de E et un réel a pour laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\operatorname*{mat}_{(v_1,v_2)} f=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on dit que f est la transvection de coefficient a par rapport à v_2, parallèlement à v_1.

Ces applications sont appelés « cisaillements » dans [5].

La matrice

$$T_{12}(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de transvection. Les matrices de transvection existent à toutes les dimensions : ce sont les $T_{ij}(a)$ avec $i\neq j$, obtenues à partir de la matrice identité en mettant un a en position (i,j). Elles sont importantes dans l'étude du groupe $GL(n,\mathbb{R})$.

Notons qu'au niveau des coordonnées, la transvection f est définie par

$$f:(x,y)\longmapsto(x+ay,y)$$

La figure ci-dessous montre comment f transforme un parallélogramme parallèle à (v_1, v_2) ; on comprend le terme « cisaillement ».

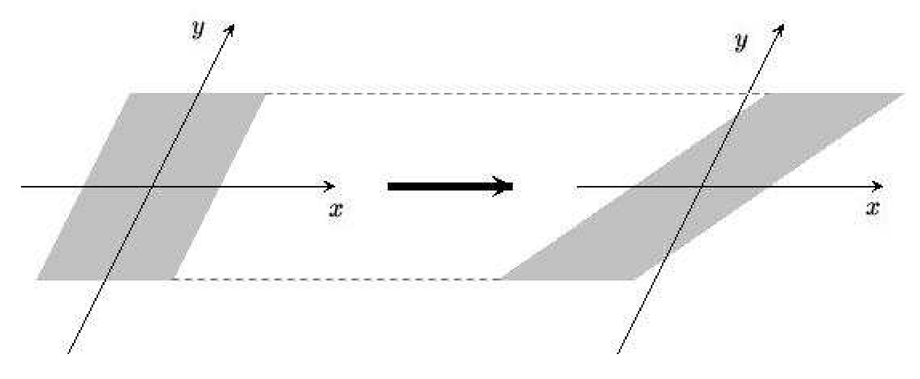


Figure 3. Le parallélogramme se penche d'autant plus que le coefficient a est élévé.

Le fait que la matrice de f dans (v_1,v_2) soit une matrice de transvection ne dépend pas de v_2 et demeure vrai si l'on remplace v_2 par un autre vecteur e_2. En effet, soit

$$e_2=bv_1+cv_2$$

avec $c\neq 0$, de sorte que $e=(v_1,e_2)$ soit une base. Soit f la transvection de coefficient a par rapport à e_2, parallélement à v_1 :

$$\operatorname*{mat}_{e} f=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regardons comment s'écrit f dans la base v. On a

$$\operatorname*{mat}_{v} e = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname*{mat}_{e} v = \begin{pmatrix} 1 & -b/c \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

d'où

$$\operatorname*{mat}_{v} f = \begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que f est le cisaillement de coefficient $\frac{a}{c}$ par rapport à v_2, parallèlement à v_1.

5 Rappels sur le complexifié d'un espace vectoriel réel

Avant de s'attaquer à la classification il est utile de rappeler quelques résultats élémentaires sur la complexification d'un espace vectoriel réel (la classification des endomorphismes d'un plan vectoriel réel se fait grâce aux nombres complexes !)

On rappelle que si E est un espace vectoriel réel on définit son compléxifié $E_{\mathbb{C}}$ comme l'espace vectoriel complexe $E \times E$ où la multiplication par un nombre complexe est donnée par

$$i(u, v) = (-v, u)$$

Notons que

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} E \\ \dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} E \end{cases}$$

Identifions E au sous-ensemble $E \times \{0\}$ de $E_{\mathbb{C}}$. Les ensembles E et iE sont clairement des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $E_{\mathbb{C}}$ et on a

$$E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$$

(somme directe réelle). Cette décomposition définit des projections r et $\jmath$ de $E_{\mathbb{C}}$ sur E telles que pour tout $u \in E_{\mathbb{C}}$

$$u = r(u) + i.\jmath(u)$$

$r(u)$ et $\jmath(u)$ sont respectivement la partie *réelle* et *imaginaire* de u (il y a unicité de la décomposition). Les éléments de E sont qualifiés de *réels* tandis que ceux de iE sont qualifiés d'*imaginaires purs*. La symétrie de l'espace $E_{\mathbb{C}}$ (considéré comme $\mathbb{R}$-espace) par rapport à E selon la direction iE

$$r(u) + i.\jmath(u) \longmapsto r(u) - i.\jmath(u)$$

est appelée *conjugaison* de $E_{\mathbb{C}}$. Les vecteurs invariants par conjugaison sont les vecteurs réels. Il est facile de voir que toute $\mathbb{R}$-base de E est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ et que tout $\mathbb{R}$-endomorphisme f de E s'étends canoniquement en un $\mathbb{C}$-endomorphisme $f_{\mathbb{C}}$ de $E_{\mathbb{C}}$ par

$$f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + if(v)$$

Voici les propriétés de $E_{\mathbb{C}}$ dont nous aurons besoin :

Proposition 7. *Soit F un plan vectoriel complexe. Si (a, b) est une base de F alors $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2i})$ est aussi une base de F.*

Démonstration. Notons $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = \frac{a-b}{2i}$. On montre facilement que

$$a = \alpha + i\beta$$

et

$$b = \alpha - i\beta$$

(admirons la beauté de toutes ces formules). Ainsi (α, β) est une famille génératrice, d'où le résultat. □

Notons au passage les matrices de passage de ces deux bases :

$$\underset{(a,b)}{\mathrm{mat}}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$$

et

$$\underset{(\alpha,\beta)}{\mathrm{mat}}(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Proposition 8. *Soit E un plan vectoriel réel. On note $E_{\mathbb{C}}$ le compléxifié de E. Si $(e,\bar{e})$ est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, alors $(r(e),\jmath(e))$ est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ (et en même temps c'est une $\mathbb{R}$-base de E).*

Démonstration. On a $e = r(e) + i.\jmath(e)$ et $\bar{e} = r(e) - i.\jmath(e)$. Ainsi $\frac{e+\bar{e}}{2} = r(e)$ et $\frac{e-\bar{e}}{2i} = \jmath(e)$, d'où le résultat, d'après la proposition 7. □

Remarquons que si e n'est ni *réel*, ni *imaginaire pur*, $(e,\bar{e})$ est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, et réciproquement (on laisse au lecteur le soin de vérifier cela). On dit que $(e,\bar{e})$ est une base *autoconjuguée*. De la précèdente proposition on déduit :

Proposition 9. *Soit E un plan vectoriel réel et $(e,\bar{e})$ une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, le compléxifié de E. Soit $x=z_1 e+z_2\bar{e}$ un élément de $E_{\mathbb{C}}$. Alors x est réel si et seulement si z_1 et z_2 sont conjugués.*

Autrement dit, dans une base *autoconjuguée*, les vecteurs réels sont ceux dont les coordonnées sont de la forme $(z,\bar{z})$.

Démonstration. On note $e = u + iv$ avec $u, v \in E$. Nous savons d'après la proposition 8 que (u,v) est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ et aussi une $\mathbb{R}$-base de E.

1. On suppose que $x\in E$. Alors $x=x_1 u+x_2 v$, avec $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ et on a

$$\underset{(e,\bar{e})}{\mathrm{mat}}\,x=\underset{(e,\bar{e})}{\mathrm{mat}}(u,v).\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\,x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 \end{pmatrix}$$

(les matrices de passage ont été données plus haut). Ceci prouve que les coordonnées de x dans $(e,\bar{e})$ sont conjuguées.

2. On suppose que z_1 et z_2 sont conjugués. On note $z_1=a+ib$, avec a et b réels. On a

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\,x=\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}(e,\bar{e}).\underset{(e,\bar{e})}{\mathrm{mat}}\,x=\begin{pmatrix} 2a \\ -2b \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les coordonnées de x dans (u,v) sont réelles et, u et v étant des vecteurs réels, que x est un vecteur réel. □

Proposition 10. *Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E. On note $f_{\mathbb{C}}$: $E_{\mathbb{C}}\to E_{\mathbb{C}}$ le compléxifié de f. Si z est une valeur propre de f associée à un vecteur propre e alors $\bar{z}$ est une valeur propre de f associée au vecteur propre $\bar{e}$.*

Autrement dit si f est un endomorphisme réel vérifiant

$$f(e)=ze$$

alors il vérifie aussi

$$f(\bar{e})=\bar{z}\bar{e}$$

Démonstration. Notons $e=u+iv$ et $z=a+ib$. Avec ces notations on a $f_{\mathbb{C}}(e)=(a+ib)(u+iv)$ et on trouve

$$f_{\mathbb{C}}(e)=(au-bv)+i(av+bu)$$

Comme par ailleurs nous savons que

$$f_{\mathbb{C}}(u+iv)=f(u)+if(v)$$

on en déduit

$$\begin{cases} f(u) = au - bv \\ f(v) = av + bu \end{cases}$$

et donc $f_{\mathbb{C}}(\bar{e}) = f_{\mathbb{C}}(u - iv) = (au - bv) - i(av + bu)$. Or

$$\bar{z}\,\bar{e} = (a - ib)(u - iv) = (au - bv) - i(av + bu)$$

d'où

$$f_{\mathbb{C}}(\bar{e}) = \bar{z}\,\bar{e}$$

□

Pour en savoir plus sur les structures *réelle-complexes* on consultera [6] ou encore [1]. Nous pouvons maintenant passer à la classification.

6 Classification

Théorème 11. *(Classification des endomorphismes d'un plan vectoriel réel) Soient E un plan vectoriel réel et $f \in \operatorname{End}(E)$. Alors f appartient à un et un seul des cas suivants.*

I. $f = p \circ k\,\mathrm{id}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et p est une projection sur une droite vectorielle de E.

II. $f = \mathfrak{h} \circ k\,\mathrm{id}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et $\mathfrak{h}$ est une rotation hyperbolique non triviale ($\mathfrak{h} \neq \mathrm{id}$).

III. $f = \mathfrak{h} \circ k\,\mathrm{id} \circ s$ où $k \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{h}$ est une rotation hyperbolique non triviale et s une symétrie.

IV. $f = k\,\mathrm{id}$ où $k \in \mathbb{R}$ (homothétie).

V. $f = \mathfrak{c} \circ k\,\mathrm{id}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et $\mathfrak{c}$ est une transvection non triviale ($\mathfrak{c} \neq \mathrm{id}$).

VI. $f = \mathfrak{e} \circ k\,\mathrm{id}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et $\mathfrak{e}$ est une rotation elliptique non triviale ($\mathfrak{e} \neq \mathrm{id}$).

Démonstration. Nous allons essentiellement nous appuyer sur les valeurs propres de f dans $\mathbb{C}$, c'est à dire les racines de P_f, le polynome caractéristique de f. On rappelle que

$$P_f(x) = \det(f - x\,\mathrm{id})$$

C'est un polynome de degré 2 à coefficients réels, et donc f possède une ou deux valeurs propres (éventuellement complexes). Dans ce qui suit m_f désigne le polynome minimal de f.

Cas 1. f n'est pas bijective. Autrement dit $\ker f \neq \{0\}$. La dimension du noyau de f ne peut être que 1 ou 2. Si $\dim \ker f = 2$ alors $f = 0$ et nous sommes dans la situation IV avec $k = 0$. Supposons maintenant que $\dim \ker f = 1$. Dans ce cas f possède deux valeurs propres réelles distinctes 0 et $\lambda \neq 0$. Soient v_1 un vecteur propre de f associé à λ et v_2 un générateur du noyau. La famille (v_1, v_2) est clairement une base de E et

$$\operatorname*{mat}_v f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $f = p \circ \lambda\mathrm{id}$ où p est la projection de E sur $\mathbb{R}v_1$ selon $\ker f$. Nous sommes dans la situation I.

Cas 2. f est bijective. Nous savons qu'ici, soit P_f possède une racine double réelle non nulle, soit deux racines réelles non nulles distinctes, soit deux racines complexes non réelles conjuguées. Discutons selon ces trois cas.

Cas 2.1. f possède une seule valeur propre, λ. On sait que $P_f = (X - \lambda)^2$ et donc $m_f = (X - \lambda)^j$ avec $j = 1$ ou $j = 2$. Le cas « $j = 1$ » est clairement le cas où $f = \lambda\mathrm{id}$. On distingue alors deux cas.

Cas 2.1.1. $f = \lambda\mathrm{id}$. Nous sommes dans la situation IV.

Cas 2.1.2. $f \neq \lambda\mathrm{id}$. Dans ce cas, $m_f = (X - \lambda)^2$, ce qui implique que f n'est pas diagonalisable. Heureusement, P_f étant scindé, f est trigonalisable et il existe une base (v_1, v_2) telle que

$$\underset{v}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ce qui montre que

$$f = \mathfrak{c} \circ \lambda\mathrm{id}$$

où

$$\mathfrak{c} \colon (x, y) \mapsto (x + \frac{a}{\lambda}\, y, y)$$

est la transvection de coefficient a/λ par rapport à v_2, parallélement à v_1. Ce cisaillement n'est pas trivial car $a \neq 0$. Nous sommes dans la situation V.

Cas 2.2. f possède deux valeurs propres réelles non nulles et distinctes, λ_1 et λ_2. Dans ce cas f est diagonalisable. Soit (v_1, v_2) une base de E telle que

$$\underset{(v_1, v_2)}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si on note (x, y) les coordonnées dans cette base, on a

$$f \colon (x, y) \mapsto (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$$

Nous allons discuter selon le signe des deux valeurs propres (il est clair par exemple que si elles ont des signes opposés, f inverse l'orientation).

Cas 2.2.1. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. On pose $k = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. On a clairement

$$f = \mathfrak{h} \circ k\mathrm{id}$$

avec

$$\mathfrak{h} \colon (x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}\, x, \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}\, y)$$

qui est une rotation hyperbolique non triviale (son coefficient est différent de 1 étant donné que $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Nous sommes dans la situation II.

Cas 2.2.2. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. On pose $k = -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. On a clairement

$$f = \mathfrak{h} \circ k\mathrm{id}$$

avec

$$\mathfrak{h} \colon (x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{|\lambda_1|}}{\sqrt{|\lambda_2|}}\, x, \frac{\sqrt{|\lambda_2|}}{\sqrt{|\lambda_1|}}\, y)$$

qui est une rotation hyperbolique non triviale, comme précédemment. Nous sommes ici aussi dans la situation II.

Cas 2.2.3. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Supposons sans perte de généralité que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. On pose $k = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}$. On a clairement

$$f = \mathfrak{h} \circ k\,\mathrm{id} \circ s$$

où

$$s \colon (x, y) \mapsto (x, -y)$$

est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}v_1$ selon $\mathbb{R}v_2$ et

$$\mathfrak{h} \colon (x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}}\, x, \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}\, y)$$

est une rotation hyperbolique non triviale ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Nous sommes dans la situation III.

Cas 2.3. f possède deux valeurs propres non réelles conjuguées, z et $\bar{z}$. Dans ce cas $f_{\mathbb{C}}$, le complexifié de f, est diagonalisable, autrement dit dans une base propre (e, e') la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ est de la forme

$$\underset{(e,e')}{\mathrm{mat}}\, f_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$$

où $a - ib = z$. Mais comment récupérer à partir de là des informations sur f qui rappelons-le, est la restriction de $f_{\mathbb{C}}$ à E ? En utilisant la proposition 10, tout simplement ! Nous savons grâce à elle que $\bar{z}$ est une valeur propre associée au vecteur propre $\bar{e}$. Ainsi, dans la base $(e, \bar{e})$, la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ est

$$\underset{(e,\bar{e})}{\mathrm{mat}}\, f_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$$

Notons $e = u + iv$. D'après la proposition 8, (u, v) est une $\mathbb{C}$-base *réelle* de $E_{\mathbb{C}}$. C'est dans cette base que nous allons regarder $f_{\mathbb{C}}$. Des égalités

$$\begin{cases} f_{\mathbb{C}}(u+iv) = f(u) + i f(v) \\ f_{\mathbb{C}}(u+iv) = (a-ib)(u+iv) = (au+bv) + i(av-bu) \end{cases}$$

on déduit

$$\begin{cases} f(u) = au + bv \\ f(v) = av - bu \end{cases}$$

d'où

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas sans rappeler la matrice d'une rotation elliptique. Notons r le module de la valeur propre $\bar{z} = a + ib$ et θ son argument, de sorte que

$$\begin{cases} \bar{z} = re^{i\theta} \\ a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

et

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$f = \mathfrak{e} \circ r\,\mathrm{id}$$

où $\mathfrak{e}$ est la rotation elliptique d'angle θ basée sur (u, v). Sa matrice est

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\, \mathfrak{e} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La valeur propre z n'étant pas réelle, cette rotation n'est pas triviale et nous sommes bien dans la situation VI.

Nous avons démontré que si $f \in \mathrm{End}(E)$, alors f appartient à l'un des types I, II, III, IV, V et VI définis plus haut. Il reste donc à prouver que f n'appartient qu'à un seul type à la fois. Pour ce faire nous donnerons pour chacun de ses six types une propriété qui lui est spécifique.

Type I. Dans ce cas f possède deux valeurs propres réelles, l'une nulle, l'autre pas.

Type II. Dans ce cas f possède deux valeurs propres distinctes, réelles, non nulles et de mêmes signes.

Type III. Dans ce cas f possède deux valeurs propres réelles, distinctes, non nulles et de signes opposés.

Type IV. Dans ce cas f possède une valeur propre unique (réelle) et f est diagonalisable.

Type V. Dans ce cas f possède une valeur propre unique (réelle) et f n'est pas diagonalisable. □

Remarque 12. Il est facile de voir que pour chaque cas les facteurs de la décomposition de f commutent (le seul cas à vérifier est le III, celui où f inverse l'orientation).

Remarque 13. L'implication

$$f_{\mathbb{C}}(e) = ze \Longrightarrow f_{\mathbb{C}}(\bar{e}) = \bar{z}\,\bar{e} \tag{1}$$

est un résultat classique. Il est utilisé par exemple pour montrer que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable, voir [4] et [2]. On a en fait un résultat plus général comme nous le montrons ci-dessous.

Définition 14. *Soient E un espace vectoriel réel, $E_{\mathbb{C}}$ son compléxifié et $\varphi \in \mathrm{End}(E_{\mathbb{C}})$. On définit le conjugué de φ, que l'on note $\bar{\varphi}$ par*

$$\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(\bar{x})}$$

pour tout $x \in E_{\mathbb{C}}$. Le conjugué de φ est une application de E dans E.

Autrement dit

$$\bar{\varphi} = \mathrm{conj} \circ \varphi \circ \mathrm{conj}$$

On conjugue l'argument x, afin que l'application $\bar{\varphi}$ ainsi obtenue soit $\mathbb{C}$-linéaire. En fait, conjuguer un endomorphisme revient à conjuguer les coefficients de ses matrices *réelles* :

Proposition 15. *Le conjugué $\bar{\varphi}$ d'un endomorphisme φ de $E_{\mathbb{C}}$ est un endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$ et sa matrice dans une base réelle s'obtient en conjuguant celle de φ dans la même base.*

Nous laissons au lecteur le soin de montrer la

Proposition 16. *Soient E un espace vectoriel réel, $E_{\mathbb{C}}$ son compléxifié et $\varphi \in \mathrm{End}(E_{\mathbb{C}})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. *φ est réel (i.e. c'est le compléxifié d'un endomorphisme de E).*

ii. *La matrice de φ dans une base réelle est réelle.*

iii. *$\bar{\varphi} = \varphi$.*

L'implication (1) est une simple conséquence de cette proposition :

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\bar{e}) &= \overline{f_{\mathbb{C}}}(\bar{e}) \\ &= \overline{f_{\mathbb{C}}(\bar{\bar{e}})} \\ &= \overline{f_{\mathbb{C}}(e)} \\ &= \overline{ze} \\ &= \bar{z}\,\bar{e} \end{aligned}$$

La première égalité vient de $\overline{f_{\mathbb{C}}} = f_{\mathbb{C}}$; la deuxième vient de la définition de $\overline{f_{\mathbb{C}}}$.

Remarque 17. On peut confronter cette classification à celle des formes quadratiques du plan vectoriel réel. Soit q une forme quadratique de E. On sait que modulo un chagement de base, $q(x, y)$ s'écrit d'une des manières ci-dessous :

1. $q(x, y) = x^2 + y^2$
2. $q(x, y) = -x^2 - y^2$
3. $q(x, y) = x^2 - y^2$
4. $q(x, y) = x^2$
5. $q(x, y) = 0$

On peut montrer que les automorphismes de E préservant la première et la deuxième forme sont les rotations elliptiques et les réflexions (voir [4]). De manière analogue, les automorphismes préservant la troisième forme sont les rotations hyperboliques, composées ou pas avec une réflexion (voir [3]). On laisse au lecteur le soin de trouver les automorphismes préservant la quatrième forme.

Bibliographie

[1] Richard Gomez. Classification des courbes algébriques de degré deux. *Site web MégaMaths*, 2004. http://pagesperso-orange.fr/megamaths.

[2] Richard Gomez. Un produit scalaire, pour quoi faire ? *Site web MégaMaths*, 2007. http://pagesperso-orange.fr/megamaths.

[3] Richard Gomez. Théorie de la relativité restreinte, épisode 1. *Site web MégaMaths*, 2010. http://pagesperso-orange.fr/megamaths.

[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire, 2e édition*. Cèpadués edition, 2002.

[5] Xavier Hubaut. Applications linéaires. *Mathématiques du secondaire, site web*, 2007. http://xavier.hubaut.info/coursmath.

[6] Mikhail Postnikov. *Lectures in geometry, vol 1. Analytic geometry*. URSS publishers Moscow, Nauka, 1979.

Edité avec TeXmacs